Лекция 7 Числовой ряд и его сходимость

Тлеулесова Айгерим Мекемтасовна

Цель лекции

- • Изучить понятие числового ряда
- • Научиться определять сходимость и расходимость
- • Освоить необходимые признаки сходимости
- • Понять применение признаков сравнения

Основные вопросы:

Понятие числового ряда и частичных сумм.

Определение сходимости и расходимости ряда.

Необходимый признак сходимости ряда.

Признак сравнения.

Предельный признак сравнения.

Основные определения

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

- Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

называется числовым рядом

- Частичные суммы: $S_n = a_1 + \ldots + a_n$
- Ряд сходится, если $S = \lim_{n\to\infty} S_n$

Если предел частичных сумм не существует (например, равен бесконечности), то ряд называется расходящимся. У расходящегося ряда сумма не определена.

Необходимый признак сходимости

Если $\Sigma\, a_n$ сходится, то $a_n \to 0$
Обратное неверно!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Признак сравнения

- Пусть $0 \le a_n \le b_n$
- • Если $\Sigma\, b_n$ сходится $\to \Sigma\, a_n$ тоже сходится
- • Если $\Sigma\, a_n$ расходится $\to \Sigma\, b_n$ тоже расходится

Предельный признак сравнения

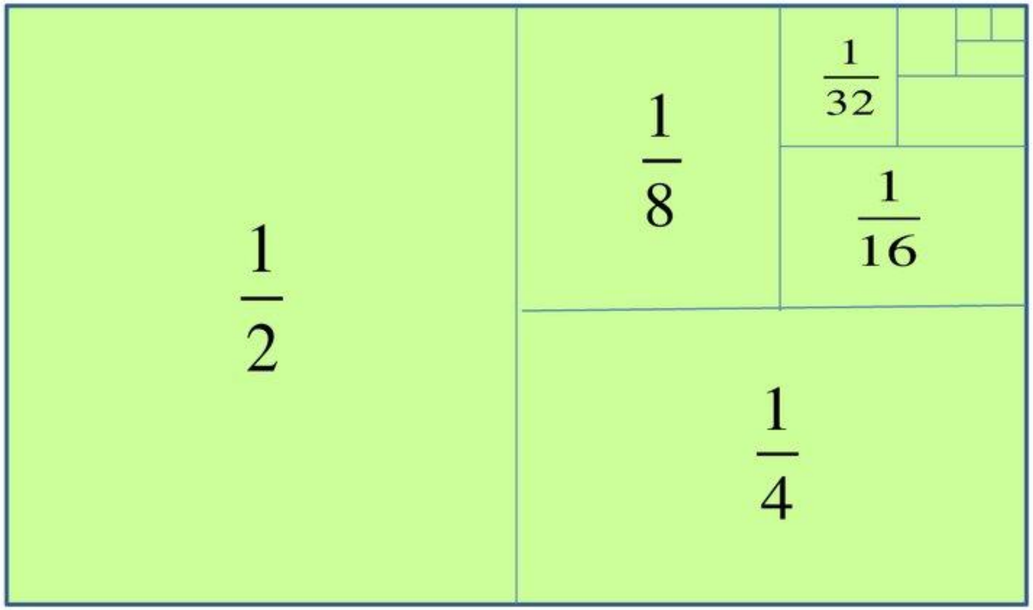
- Если $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$
- то ряды ведут себя одинаково:
- оба сходятся или оба расходятся

Пример 1
(бесконечно убывающая геометрическая прогрессия):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2}\\
S_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4} &&= \frac{3}{4}\\
S_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} &&= \frac{7}{8}\\
S_4 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} &&= \frac{15}{16}\\
S_5 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} &&= \frac{31}{32}
\end{aligned}\right\}$$

частичные суммы всё меньше и меньше отличаются от 1.



Объединение всех этих прямоугольников дает исходный прямоугольник, значит, и сумма их площадей д.б. равна площади исходного:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+....+\frac{1}{2^n}+...=1$$

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

Пример

Доказать, что ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Найдем n - ю частичную сумму данного ряда S_n .

Общий член ряда $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ представим в виде: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Тогда $\boldsymbol{S_1}=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{S_2}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=1-\frac{1}{3}$, ….,

$\boldsymbol{S_n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=$

$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$

Получим $S_n=1-\frac{1}{n+1}$. Отсюда имеем: $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$.

Контрольные вопросы

- • Что такое числовой ряд?
- • В чем суть необходимого признака?
- • Сформулируйте признак сравнения
- • Когда можно применять предельный признак?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.